

MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 5.

1. Ještě o nekonečných řadách

a) Ukažte (užitím nutné podmínky konvergence řad), že divergují řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^2 ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n .$$

b) Rozhodněte o konvergenci, resp. divergenci, řady (užijte srovnávací kritérium) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2 + 3} ; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 1} .$$

c)* Když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ konverguje .

2. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; b) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x}}$ c) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

3. Ukažte, že funkce $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí, tedy prostá na \mathbb{R} a najděte k funkci f na \mathbb{R} funkci inverzní.

4. Zkuste načrtnout grafy funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ a) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; b) $h(x) = \exp(-|x|)$; c) $k(x) = |\ln|x||$.

5. Z definice limity ukažte:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0$.

6. Ukažte, že neexistují limity

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nebo b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin x$ nebo c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nebo d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x)$.